ЛА Каспарян 05.11

Линейни пространства и подпространства
Линейна обвивка
Следствие от аксиомите за линейно пространство

Сл 5
За $\forall a \in V$ е в сила $-a = (-1)a$ за $-1 \in F$

Док-во
от $a + (-1)a \overset{\text{акс 8}}{=} 1a + (-1)a \overset{\text{дистр.}}{=} [1+(-1)]a = 0a \overset{\text{сл 3}}{=} \vec{0}$ и
от единствеността на противоположния вектор (сл 2)
получаваме $-a = (-1)a$

Сл 6
За $\forall a, b \in V$, уравнението $a+x=b$ има единствено
решение $x_0 = b + (-a)$, което бележим $x_0 = b - a$

Док-во

От $a + [b+(-a)] = [b+(-a)] + a = b + [(-a)+a] = b + \vec{0} = b \Rightarrow$
$x_0 = b + (-a)$ е решение на уравнението $a+x=b$.
Ако x_1 е някакво решение на уравнението $a+x=b$, то
от $a + x_1 = b$ получаваме

$x_1 = x_1 + \vec{0} = x_1 + [a+(-a)] = (x_1 + a) + (-a) = b + (-a)$
следователно $x_1 = x_0$ и $a+x=b$ има единствено
решение $x_0 = b - a$

Сл 7
Ако $\alpha a = \vec{0}$ за $\forall \alpha \in F$ и $a \in V$, то $\alpha = 0 \in F$ или $a = \vec{0} \in V$

Док-во

Ако $\alpha a = \vec{0}$ и $\alpha \neq 0$ то следователно умножение с α^{-1}

Имаме $a = 1a \overset{\text{св 8}}{=} (\lambda\lambda^{-1})a \overset{\text{АБ}}{=} \lambda^{-1}(\lambda a) = \lambda^{-1}\vec{0} \overset{\text{св 4}}{=} \vec{0}$

Дефиниция за линейна комбинация на вектори

Ако V е линейно пространство, $a_1, a_2 \dots a_n$ са вектори от V ($a_1 a_2 \dots a_n \in V$), $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \in F$ то векторът $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \in V$ се нарича линейна комбинация на $a_1 a_2 \dots a_n$ с коефициенти $\lambda_1 \dots \lambda_n$

Дефиниция за подпространство

Непразното множество W на линейно пространство V е подпространство, ако за произволни $a_1 \dots a_n \in W$ и произволни $\lambda_1 \dots \lambda_n \in F$ е в сила $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \in W$

Т6/

Непразното подмножество W на линейно пространство V е подпространство $\Leftrightarrow$ са в сила следните две св-ва

I св-во

$\lambda a \in W$ за $\forall a \in W$ и $\forall \lambda \in F$

II св-во

$a_1 + a_2 \in W$ за $\forall a_1, a_2 \in W$

Док-во

Ако W е подпространство, то I и II са в сила, защото λa с $a \in W$, $\lambda \in F$ и $a_1 + a_2 = \lambda a_1 + \lambda a_2 = 1a_1 + 1a_2$ за $a_1, a_2 \in W$ и $1 \in F$ са частни случаи на линейните комбинации на вектори от W

Да предположим, че са изпълнени условията I и II. С индукция по броя n на събираемите в линейната

Комбинацията $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ с $a_1 \dots a_n \in W$ и да проверим че такива линейни комбинации не остават

За $n=1$ $a \in W$ условието $\lambda_1 a_1 \in W$ е предположение (1)

за $a_1 \dots a_n \in W$ да допуснем че $\lambda_1 a_1 + \dots \lambda_{n-1} a_{n-1} \in W$

Съгласно Т има $\lambda_n a_n \in W$. От П получаваме

$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}) + \lambda_n a_n = \lambda_1 a_1 + \dots \lambda_n a_n \in W$

Сл 1

Непразното подмножество W на линейно пространство V е подпространство $\Leftrightarrow$ W е линейно пространство относно събирането на вектори от V и умножението на вектор от V със скалар

Сл 2

Ако W е подпространство на V то за $\forall w \in W$ е в сила $-w \in W$

Док-во

$-w = (-1)w \in W$ съгласно условие Т (от ТВ)

Сл 3

Нулевият от V принадлежи на $\forall$ подпространство W $(\vec{0} \in W, \forall)$

Док-во

За произволно $w \in W$ и числото $0 \in F$ имаме

$\vec{0} \overset{а3}{=} 0w \in W$ по условие Т от ТВ

$\Leftarrow$ Нека

За $\forall w$ от W знаем че $-w \in W \Rightarrow \vec{0} = (w + (-w)) \in W$

от условие П от ТВ

Примери за подпространства

1) Ако V е линейно пространство то W и $\{0\}$ за $\vec{0} \in V$ са подпространства на V

$$\lambda \vec{0} = \vec{0} \quad , \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

2) Нека k и n са естествени числа ($\in \mathbb{N}$) и $k < n$, $V_{k,n} \{ x = (x_1 - x_n) \in F^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n \}$, тогава $V_{k,n}$ е подпространство на наредените n-торки F^n, защото за произвольни $\forall x, y \in V_{k,n}$, $\forall \lambda \in F$ е в сила

$$\lambda x = \lambda (x_1 - x_k, 0, \dots 0) = \lambda x_1, \lambda x_2 - \lambda x_k, \lambda 0 - \lambda 0) =$$
$$(\lambda x_1, \lambda x_2 - \lambda x_k, 0, 0 - 0) \in V_{k,n} \text{ и}$$
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_k + y_k, 0, \dots 0) \in V_{k,n}$$

3) Полиномите $F^{(n+1)}_{[x]}$ на x с коефициенти от F и степен $\leq n$ образуват подпространство на пространството на $\forall$ полиноми на x с коефициенти от F, по-точно за $\forall f, g \in F^{(n+1)}_{[x]}$, $\forall \alpha \in F \Rightarrow$

$$\deg(\lambda f) \leq n \text{ и } \deg(f+g) \leq (\max \deg f, \deg g) \leq n$$

Дефиниция линейна обвивка

Линейната обвивка $\ell(S)$ на подмножество S на линейно пространство V е множеството на линейните комбинации $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_n a_n$ на векторите $a_1 \dots a_n \in S$

Т. Линейната обвивка $\ell(S)$ на подпространство $\emptyset \neq S \subseteq V$ е подпространство на V. Още повече че

$\ell(S) = \cap W$ е сечението на подпространствата W на V съдържащи S или $\ell(S)$ е линейно пространство на V съдържащо S. $S \subseteq W \subseteq V$ (подпр)

В частност $S = \ell(S) \Leftrightarrow S$ е подпространство на V

Док-во

За $\forall \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$ с $a_i - a_m b_j - b_n \in S$ имаме

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j \in \ell(S)$

за $\forall \lambda \in F$ е в сила $\lambda \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \lambda_i) a_i \in \ell(S)$

Оттук следва че $\ell(S)$ е подпространство на V

От една страна линейната обвивка на $S (\ell(S))$ е подпространство на V съдържащо S така че участва в сечението $\cap W$ и $S \subseteq W \subseteq V$ съдържа това сечение ($\subseteq$ - съдържа)

$\ell(S) \supseteq \cap W \quad . S \subseteq W \subseteq V$ за $\forall$ елемент
подпр

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \in \ell(S)$ с $a_1 - a_m \in S$ и $\forall$ подпространство W на V съдържащо от $a_1 - a_m \in S \subseteq W \Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \in W$ по определението за подпространство. Следователно $\ell(S) \subseteq W$ за $\forall S \subseteq W \subseteq V$ и $\ell(S) \subseteq \cap W$. Това дава $\ell(S) = \cap W$
$S \subseteq W \subseteq V$ подпр $S \subseteq W \subseteq V$

Ако $S = \ell(S)$ то S е подпространство, защото $\ell(S)$ е подпространство. Ако S е подпространство на V то по определение $\ell(S) \subseteq S$
Значи $S \subseteq \ell(S)$, така че $S = \ell(S)$ съвпада с линейната обвивка

Примери за линейни обвивки

1) $\ell(V) = V \qquad \ell\{0\} = \{0\}$

2) Ако $V \neq \vec{0}$ то $\ell(v)$ е правата през началото съдържаща v

$$\ell(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in F\}$$

3) Ако ненулевите вектори v и w не лежат на една права то линейната обвивка $\ell(v,w) = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in F\}$ е равнината през началото породена от v и w

Линейна зависимост и независимост на вектори
Определения и основни леми

За $\forall v_1 - v_n \in V \Rightarrow 0v_1 + \dots + 0v_n = \vec{0}$

Дефиниция

Ако единствената линейна комбинация на векторите $a_1 - a_n \in V$, равна на $\vec{0}$ е $0a_1 + \dots + 0a_n$ казваме че $a_1 - a_n$ са линейно независими (ЛНЗ)

С други думи ако $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0} \Rightarrow$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ то $a_1 \dots a_n$ са ЛНЗ

Безкрайна система вектори е ЛНЗ ако $\forall$ крайна нейна подсистема е ЛНЗ

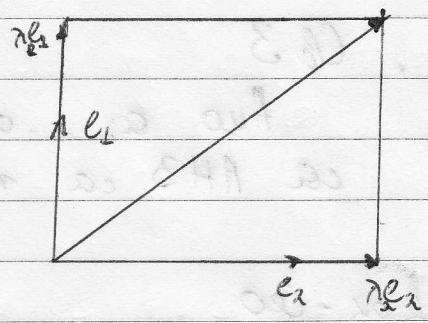
Съгласно определението за ЛНЗ, векторите $b_1 - b_m \in V$ са ЛЗ (линейно зависими), ако $\exists \mu_1 - \mu_m \in F$ с поне един $\mu_i \neq 0$ т.че $\mu_1 b_1 + \dots + \mu_m b_m = \vec{0}$

$$b_i = -\frac{\mu_1}{\mu_i} b_1 - \dots - \frac{\mu_m}{\mu_i} b_m$$

$$b_i \in \ell(b_1 - b_{i-1}, b_{i+1} \dots b_m)$$

Пример

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 - e_3 = \vec{0}$



От определението за ЛНЗ на безкрайна система следва че една безкрайна система вектори е ЛЗ ако съдържа поне една крайна линейно зависима подсистема

Свойства на ЛЗ и ЛНЗ на вектори

С1 един вектор a_1 е ЛЗ $\Leftrightarrow a_1 = \vec{0}$

Док-во

Ако $\lambda_1 a_1 = \vec{0}$ за $\lambda_1 \in F, \lambda_1 \neq 0$ то $a_1 = \vec{0}$
по следствие 4 от Аксиоми за линейни пространства

С2 Векторите $a_1 - a_n$ за $n \geq 2$ са ЛЗ $\Leftrightarrow \exists a_i \in l(a_1 - a_n)$

Док-во →

Ако $\lambda_1 a_1 - \dots \lambda_i a_i - \lambda_n a_n = \vec{0}$ с $\lambda_1 - \lambda_n F$, $\lambda_i \neq 0$, то
$a_i = -\lambda_1 \lambda_i^{-1} a_1 - \lambda_2 \lambda_i^{-1} a_2 - \dots - \lambda_n \lambda_i^{-1} a_n \in l(a_1 - a_{i-1}, a_{i+1} - a_n)$

Ако $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j a_j + \sum_{j=i+1}^{n} \mu_j a_j \in l(a_1 - a_n)$, то
$\sum_{j=1}^{i-1} \mu_j a_j + (-1) a_i + \sum_{j=i+1}^{n} \mu_j a_j = \vec{0}$ е линейна
комбинация с $\lambda_i = -1 \neq 0$ представяща $\vec{0}$ т.-че
$a_1 - a_{i-1}, a_{i+1}, - a_n$ са ЛЗ

Св 3

Ако $a_1 \dots a_k$ са ЛНЗ вектори то $a_1 - a_k, a_{k+1} - a_n$ са ЛНЗ са произволни $a_{k+1} - a_n$

Док-во

Ако $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_i a_i + \dots \lambda_k a_k = \vec{0}$ за $\lambda_1 - \lambda_k \in F$ с $\lambda_i = 0$ то $\lambda_i a_i \neq \lambda_1 a_1 + \dots \lambda_k a_k + 0 a_{k+1} + \dots 0 a_n = \vec{0}$ с $\lambda_i \neq 0$ гарантира ЛЗ-ност на системата $a_1 - a_{k+1} - a_n$

$A \Rightarrow B \quad \neg B = \neg A \quad$ (Т-отрицание)

Св 4

Ако $e_1 - e_n$ са ЛНЗ то за $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$ векторите $e_1 - e_k$ са ЛНЗ

Док-во → следва от св-3

Лема за мънкетна зависимост –
Основна лема на линейната алгебра

$a_1 - a_n, b_1 - b_m$ са вектори от линейно пространство V, $b_1 - b_m \in L(a_1 - a_n)$ и $m > n$, то $b_1 - b_m$ са ЛЗ

Док-во

Индукция по n, ако $b_1 - b_m \in L(a_1)(n-1)$ $m = 2$ то $b_1 - b_m$ са ЛЗ, ако съдържат $\vec{0}$ (т.е. $a_i = \vec{0}$). Ако $b_1 - b_m \in L(a_1) \setminus \{\vec{0}\}$ то $b_i = \lambda_i a_i$, за $\lambda_i \in F$, $\lambda \neq 0$ тогава $\lambda_2 b_1 - \lambda_1 b_2 = \lambda_2(\lambda_1 a_1) - \lambda_1(\lambda_2 a_1) = \vec{0}$

$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ т.е $b_1 b_2$ ЛЗ $\Rightarrow b_1 - b_m$ са ЛЗ

За произволни числа

$b = c_{11}a_1 + \dots c_{1n}a \quad \dots \quad c\ c_{ij} \in F$

$b_m = c_{m1}a_1 + \dots + c_{mm}a_m$

Без ограничение $b_m \neq 0$

(Ако $b_m = \vec{0}$ то $b_m \in ЛЗ \Rightarrow b_1 - b_{m-1} = \vec{0}$ ЛЗ система)

След евентуално пренареждане на $a_1 \dots a_n$ имаме $c_{mm}a \neq 0 \in F$. С помощта на b_m елиминираме от представянията на $b_1 \dots b_{m-1}$, с отчитане за $\forall\ 1 \leq i \leq m-1$ разглеждаме $b'_i = b_i - \frac{c_{ia}}{c_{mm}} b_m$ $\in l(a_1 \dots a_{n-1})$

По индукционно предположение от $b'_1 \dots b'_{m-1} \in l(a_1 \dots a_{n-1})$ с $m-1 > n-1$ следва ЛЗ-та на $b'_1 \dots b'_{m-1}$. Оттук $\exists\ \mu_{m-1} \dots \mu_{m-1} \in F$ с поне едно $\mu_i \neq 0$ т.ч.

$$\sum_{i=1}^{m-1} \mu_i b_i = \vec{0} \quad \text{при } \mu_i \neq 0$$

Следователно $b_1 \dots b_m$ са ЛЗ

Лема за ЛНЗ

Ако $a_1 \dots a_n \in V$ са ЛНЗ вектори и $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1 \dots a_n)$ то $a_1 \dots a_n, a_{n+1}$ са ЛНЗ

Док-во

Допускаме противното т.е. $a_1 \dots a_n$ са ЛЗ и разглеждаме линейната комбинация $\lambda_1 a_1 + \dots \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \vec{0}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$ за $1 \leq i \leq n+1$

Ако $\lambda_{n+1} \neq 0$ то $a_{n+1} = -\frac{\lambda_1 a_1}{\lambda_{n+1}} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} a_n \in \ell(a_1 \dots a_n)$
Противно на предположението че $a_{n+1} \notin \ell(a_1 \dots a_n)$
Следователно $\lambda_{n+1} = 0$ и $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0}$ с някое $\lambda_i \neq 0$. Това противоречи с ЛЗ на $a_1 \dots a_n$ и доказва ЛНЗ на $a_1 \dots a_{n+1}$

Базис. Крайномерни пространства. Размерност

Деф

Непразното множество B е базис на ненулевото линейно пространство V, ако първо $B \subseteq V$ е ЛНЗ система вектори и второ $\ell(B) = V$
(максимално независима подсистема)

Пример
Нека $e_i = (\underbrace{0 \dots 0}_{i-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-i})$ е наредената енторка с единствен ненулев елемент 1-ца в i-та позиция. Тогава $e_1 \dots e_n$ е базис на F^n
Наистина ако $(\underbrace{0 \dots 0}_{n}) = \vec{0} = \lambda_1 e_1 + \lambda_n e_n =$

$\lambda_1 (100 \dots 0) + \lambda_2 (010 \dots 0) + \dots + \lambda_n (0 \dots 1) = (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ и $e_1 \dots e_n$ са ЛНЗ. Твърдим че $\ell(e_1 \dots e_n) = F^n$ тъй като всеки елемент F^n е от вида $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 \dots + x_n e_n$. Следователно $e_1 \dots e_n$ е базис на наредените енторки (F^n)

Ако F е числово поле то $1, x \dots x^n$ образуват базис на $F_{[x]}$ ако $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0$ то $a_0 = a_1 = a_n = 0$. Всеки полином е от линейната обвивка на мономите на $x \in \ell(1, x \dots x^n)$. Ако линейното пространство $V = \ell(e_1 \dots e_m)$ е линейна

Обвивка на краен брой вектори, казваме че V е крайномерно

Лема

Пространството $V = l(b_1 - b_m) \neq \{\vec{0}\}$ е крайномерно и ненулево $\Leftrightarrow$ има краен базис

Док-во

Ако V има базис $a_1 - a_n$ то $l(a_1, -, a_m) e = V$ и е ненулево крайномерно пространство

обратно

Ако ненулевото пространство V е крайномерно и $b_1 - b_m$ са ЛНЗ то $b_1 - b_m$ е базис на V. Ако $b_1 - b_m$ са ЛЗ то $\exists b_i$ от линейната обвивка на останалите. т.е. $b_i \in (b_1 - b_{i-1}, b_{i+1}, - b_m)$
Сега $V = l(b_1 - b_m) = l(b_1 - b_{i-1}, b_{i+1}, - b_m)$

сигнали $l(b_1 - b_{i-1}, b_{i+1} - b_m) \subseteq l(b_1 - b_m)$ т.е. $V = l(b_1 - b_{i-1}, b_{i+1} - b_m)$. Продължавайки по този начин след краен брой стъпки получаваме $V = l(b_{i_1} - b_{i_m})$ с ЛНЗ $b_{i_1} - b_{i_m}$ и $b_{i_1} - b_{i_m}$ е базис на V